L'ARGUMENT DE LA DIAGONALE DE CANTOR NE PASSE PAS LE TEST DE COHÉRENCE DE L'APPLICATION IDENTITÉ

BERTRAND D. THÉBAULT

ABSTRACT. RCDA3r2Fr Dans cet article, le troisième de la série intitulée "Réfutation de l'Argument de la Diagonale de Cantor (Refuting Cantor's Diagonal Argument: RCDA)", je propose d'appliquer une vérification formelle de cohérence à l'Argument de la Diagonale de Cantor utilisé sur l'application identité dans l'intervalle [0, 1[des nombres réels et lui-même. L'ADC donne le résultat [habituel] non surjectif, pourtant impossible puisque l'application identité est nécessairement bijective. L'échec de l'ADC à détecter une bijection pourtant garantie par l'application identité prouve que l'ADC n'est pas un argument valide pour qualifier la bijectivité d'une mise en correspondance biunivoque entre un ensemble arbitraire E et l'intervalle des nombres réels [0, 1[.

Contournement du débat scientifique par le dénigrement de la date de publication: cet article, initialement publié en anglais le 1er avril 2024, a été partiellement traduit en français le 17 avril 2024 en avant première sur les-mathematiques.net [1]. Malgré son apport significatif et relativement simple sur un sujet mathématique fondamental, certains participants du forum, dépourvus d'arguments scientifiques solides, ont convaincu JLT l'administrateur qu'il s'agissait d'une blague, en invoquant la date de publication de la version originale. Le 20 avril 2024, JLT a conclu à tort : "Les blagues les plus courtes étant les meilleures, fermons ce fil."

Indice de Maturité de cet article : 4.7/5

CONTENTS

Date: 1er avril 2024 en Anglais - 21 avril 2024 en Français.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 03E65.
Key words and phrases. Nombres naturels, Argument de la Diagonale de Cantor, Application identité, Nombres transfinis, bijectif, non surjectif.

Part 1. Fonction identité pour application identité

1. Fonction identité

Définition 1.1. La définition de la fonction identité est rappelée ci-dessous:

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Remarque 1.2. La fonction identité inverse, notée id^{-1}, est égale à la fonction identité : $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$

2. L'application identité sur l'intervalle $[0, 1[$ des nombres réels

Définition 2.1. L'application identité est définie sur l'intervalle $[0, 1[$ des nombres réels et lui-même comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Id} : [0, 1[&\to [0, 1[\\ x &\mapsto \mathrm{Id}(x) = x \end{aligned}$$

Id, l'application identité entre l'intervalle $[0, 1[$ des nombres réels et lui-même, notée $\mathbf{Id}\big([0, 1[\big) = [0, 1[$, est bijective puisque chaque élément distinct $\mathrm{Id}(x) = x$ dans l'image a une pré-image distincte x.

Remarque 2.2. L'application identité inverse, notée $\mathbf{Id}^{-1}$, est l'application identité : $\mathbf{Id}^{-1} = \mathbf{Id}$

Part 2. L'Argument de la Diagonale de Cantor utilisé sur l'application identité

3. L'Argument de la Diagonale de Cantor entre les nombres naturels de l'ensemble $\mathbb{N}$ et les nombres réels dans l'intervalle $[0, 1[$

Sous l'hypothèse de la dénombrabilité des nombres réels dans l'intervalle $[0, 1[$, l'Argument de la Diagonale de Cantor (ADC) est censé prouver qu'une mise en correspondance biunivoque entre les nombres naturels de l'ensemble $\mathbb{N}$ et les nombres réels dans l'intervalle $[0, 1[$ montre une correspondance non surjective.
Cantor conclut que l'intervalle $[0, 1[$ des nombres réels avait une cardinalité supérieure à celle de l'ensemble $\mathbb{N}$, et que cet intervalle était non dénombrable. Si l'Argument de la Diagonale de Cantor avait été valide, Cantor aurait eu une certaine légitimité à imaginer des nombres transfinis plus grands que l'infini, même si cela reste discutable étant donné que sa démarche était complètement dépourvue des étapes de construction de tels nombres.

4. Objectif de cette partie

Dans le cadre d'une vérification formelle de cohérence, qui fait office de Vérification d'Aptitude au Bon Fonctionnement (VABF), je vais appliquer l'Argument de la Diagonale de Cantor (ADC) entre l'intervalle ($[0, 1[$ des nombres réels et lui-même en utilisant l'Application identité $\mathbf{Id}\big([0, 1[\big) = [0, 1[$ qui garantie une bijection.

5. Hypothèse initiale : l'ADC est un argument valide pour qualifier la bijectivité d'une mise en correspondance biunivoque

Hypothèse 5.1. *L'Argument de la Diagonale de Cantor est un argument valide pour qualifier la bijectivité d'une mise en correspondance biunivoque entre un ensemble arbitraire E et l'intervalle des nombres réels* $[0, 1[$.

6. $1^{::re}$ ÉTAPE DE L'ARGUMENT DE LA DIAGONALE DE CANTOR UTILISÉ SUR L'APPLICATION IDENTITÉ

Soit $E = \mathbf{Id}\left([0,1[\right)$. L'application identité **Id** appliquée entre l'intervalle $[0,1[$ des nombres réels mis en correspondance biunivoque avec lui-même, en utilisant les nombres positionnels en base r, peut s'exprimer, en réutilisant les notations de Li Hongyi [3], comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Id} \,:\, [0,1[&\to [0,1[\\ \mathrm{Id}(\mathrm{a}_1) = \mathrm{a}_1 &\mapsto a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ \mathrm{Id}(\mathrm{a}_2) = \mathrm{a}_2 &\mapsto a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ \mathrm{Id}(\mathrm{a}_3) = \mathrm{a}_3 &\mapsto a_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.1}$$

7. $2^{i::me}$ ÉTAPE DE L'ARGUMENT DE LA DIAGONALE DE CANTOR

Soit $\overline{d} = f(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ l'antidiagonale formée par les chiffres incrémentés (modulo r) de la diagonale comme suit ([2]) :

$$\overline{d} = 0.\bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3\ldots \text{ avec } \overline{d}_i \equiv a_{ii} + 1 \mod r \tag{7.1}$$

où r est la base des nombres positionnels.

8. AFFINEMENT DE L'HYPOTHÈSE INITIALE

J'affine l'hypothèse initiale 5.1 à la lumière de l'équation 7.1

Elaboration 8.1. *L'Argument de la Diagonale de Cantor est un argument valide pour qualifier la bijectivité d'une mise en correspondance biunivoque entre un ensemble arbitraire E et l'intervalle des nombres réels* $[0,1[$*, ce qui implique :*

- *si l'antidiagonale* $\overline{d}$ **est retrouvée** *dans la liste* $a_1, a_2, a_3, \ldots$*, la mise en correspondance biunivoque est* **bijective**
- *si l'antidiagonale* $\overline{d}$ **n'est pas retrouvée** *dans la liste* $a_1, a_2, a_3, \ldots$*, la mise en correspondance biunivoque est* **non surjective**

9. ÉTAPE DU RÉSULTAT DE L'ARGUMENT DE LA DIAGONALE DE CANTOR :

En réutilisant l'essentiel de la preuve de Hong-Yi Lee [4] : Puisque l'équation 7.1 garantit que pour tout nombre réel a_i, $\overline{d}$ a un chiffre, $\bar{d}_i$, distinct des chiffres antidiagonaux a_{ii} de a_i $\forall i \in \{1,2,3,\ldots\}$, ce qui assure que pour tout nombre réel :

$$a_i \neq \overline{d}\ \forall i \in \{1,2,3,\ldots\} \ldots \implies \overline{d} \notin \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \tag{9.1}$$

l'antidiagonale $\overline{d}$ n'est pas présente dans la liste $a_1, a_2, a_3, \ldots$:

(R1) cela suggère une mise en correspondance biunivoque non surjective, impliquant que les ensembles ne sont pas équipotents et ne peuvent pas être des ensembles identiques

(R2) $E = \mathbf{Id}\left([0,1[\right) = [0,1[$ assure une mise en correspondance bijective entre des ensembles identiques.

ce qui conduit à une contradiction entre (R1) et (R2). Cette contradiction implique que l'hypothèse initiale 5.1 et sa version affinée 8.1 sont incorrectes et que **l'Argument de la Diagonale de Cantor n'est pas un argument valide pour qualifier la bijectivité d'une mise en correspondance biunivoque entre un ensemble arbitraire E et l'intervalle des nombres réels** $[0,1[$.

Part 3. Conclusion

Dans le cadre d'une vérification formelle de cohérence, qui fait office de Vérification d'Aptitude au Bon Fonctionnement (VABF), en supposant que l'Argument Diagonal de Cantor (ADC) est une méthode valide pour établir la bijectivité d'une correspondance biunivoque entre un ensemble arbitraire E et l'intervalle des nombres réels $[0,1[$, cette vérification conduit à appliquer l'ADC entre l'intervalle $[0,1[$ des nombres réels et lui-même en utilisant l'application identité $\mathbf{Id}\left([0,1[\right) = [0,1[$ qui est bijective.

(1) Étant donné que l'antidiagonale $\overline{d} = f(a_1, a_2, a_3, \dots)$ n'est pas trouvée dans la liste $a_1, a_2, a_3, \dots$ [comme d'habitude], cela suggère que l'application identité **Id** n'est pas surjective.
(2) Cependant, cela contredit le fait que $\mathbf{Id}\left([0,1[\right) = [0,1[$ garantie une mise en correspondance bijective.
(3) Cette contradiction implique que l'hypothèse initiale est incorrecte et que l'ADC n'est pas une méthode valide pour qualifier la bijectivité d'une mise en correspondance biunivoque entre un ensemble arbitraire E et l'intervalle $[0,1[$ des nombres réels.

Cet article, volontairement concis, ne traite pas de ses implications préjudiciables aux nombres transfinis.
Mon article suivant, RCDA4, démontre que le Test pour retrouver l'antidiagonal de Cantor est intrinsèquement vouée à l'échec, et son Entropie de Shannon produit 0 bits d'information.

References

[1] les-mathematiques.net *L'argument de la Diagonale de Cantor échoue au test de l'application identité bijective* https://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/2337442/largument-de-la-diagonale-de-cantor-echo

[2] Wolfgang Mückenheim: *Transfinity: A Source Book, 2.2.3 Cantor's second uncountability proof p:32*. https://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/Transfinity/Transfinity/pdf

[3] Li Hongyi: *A Rigorous Examination on Cantor's Diagonal Argument, Now write the above real numbers as (p:1)*. https://vixra.org/pdf/2106.0160v1.pdf

[4] Li Hongyi: *A Rigorous Examination on Cantor's Diagonal Argument (p:2)*, Since eq.(3) guarantees that for any real number a_i, b has one decimal place, b_i, which is different from the i-th decimal place a_{ii} of the real number a_i, which ensures that for any real number a_i,
$a_i \neq b \ \ (i = 1, 2, 3, \dots) \qquad (4)$
https://vixra.org/pdf/2106.0160v1.pdf

Merci à Lê Nguyen Hoang et sa chaîne YouTube Science4all, qui m'a fait découvrir "La diagonale dévastatrice de Cantor - Infini 16", ce qui m'a motivé à reprendre les mathématiques à l'âge de 55 ans... pour venir à la rescousse des étudiants en maths devant apprendre des maths aussi inutiles qu'erronées...

Un grand merci au Professeur Wolfgang Mückenheim, à qui revient un immense crédit pour avoir rassemblé des sources de haut niveau dans son remarquable Transfinity Source Book. Son dévouement inébranlable à la vérité sert de phare, encourageant la persévérance dans la quête de compréhension, même au milieu de l'incertitude.
Les recherches méticuleuses du Professeur Mückenheim couvrent un spectre complet, incorporant du matériel de référence sur la théorie des nombres transfinis, que ce soit les arguments des sceptiques ou la présentation fidèle et abondante des références sur les nombres transfinis. Ces efforts facilitent non seulement la compréhension mais renforcent également considérablement les arguments en faveur du scepticisme transfini. Grâce à ce livre, chacun est libre de s'enrichir et de charger son GPS avec l'itinéraire mathématique permettant de laisser très loin derrière soi le domaine transfini.

Son dévouement et ses idées ont considérablement enrichi ma compréhension et affiné ma pensée critique dans ce domaine.

Un grand merci à Allen Bogart, Adam Polak et David Peralta pour leurs commentaires perspicaces et leur soutien remarquable lors de la révision finale de cet article.

Merci à ma famille de m'avoir accompagné avec bienveillance dans ma recherche de la vérité.

BITCLIFF LTD C/O BERTRAND THEBAULT 27, OLD GLOUCESTER STREET LONDON WC1N 3AX UNITED KINGDOM

Email address: `bertrand@boldrift.com`